Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 43

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

22 de septiembre de 2019

1. Cálculo del residuo

Javier ha demostrado que el residuo de la función

$$f(z) = \frac{e^{-iaz}}{z^2 - b^2 + 2ib\varepsilon} = \frac{e^{-iaz}}{\big(z - (b - i\varepsilon)\big)\big(z + (b - i\varepsilon)\big)} \tag{1}$$

En el punto $z_0 = -b + i\varepsilon$ es $\frac{e^{iab}}{-2b}$. Comprobemos ahora que en el punto $z_0 = b - i\varepsilon$ es $\frac{e^{-iab}}{2b}$:

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = \lim_{z\to b-i\varepsilon}(z - (b - i\varepsilon))\frac{e^{-iaz}}{\big(z - (b - i\varepsilon)\big)\big(z + (b - i\varepsilon)\big)} = \frac{e^{-ia(b-i\varepsilon)}}{2(b - i\varepsilon)} \tag{2}$$

Por lo que, al hacer el límite $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-iab-a\varepsilon}}{2(b - i\varepsilon)} = \frac{e^{-iab}}{2b} \tag{3}$$

2. Demostrar la "prescripción $i\varepsilon$"

Javier ha demostrado la siguiente integral:

$$I = \int \frac{e^{-iax}}{x^2 - b^2 + 2ib\varepsilon}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z), -b + i\varepsilon] = 2\pi i\frac{e^{-ia(-b+i\varepsilon)}}{2(-b + i\varepsilon)} = -\pi i\frac{e^{ia(b-i\varepsilon)}}{b - i\varepsilon}, \quad \text{si } a < 0 \tag{4}$$

$$I = \int \frac{e^{-iax}}{x^2 - b^2 + 2ib\varepsilon}\,\mathrm{d}x = -2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z), b - i\varepsilon] = -2\pi i\frac{e^{-ia(b-i\varepsilon)}}{2(b - i\varepsilon)} = -\pi i\frac{e^{-ia(b-i\varepsilon)}}{b - i\varepsilon}, \quad \text{si } a > 0 \tag{5}$$

Por lo que

$$I = -\pi i\frac{e^{-i(b-i\varepsilon)|a|}}{b - i\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\frac{\pi i}{b}e^{-ib|a|} \tag{6}$$

Vamos a hacer ahora un cambio de variable

$$\varepsilon' = 2b\varepsilon \tag{7}$$

Dado que b es una constante fija tenemos que $\varepsilon' \to 0 \iff \varepsilon \to 0$.

$$I = \int \frac{e^{-iax}}{x^2 - b^2 + i\varepsilon'}\,\mathrm{d}x = -\pi i\frac{e^{-i(b-i\frac{\varepsilon'}{2b})|a|}}{b - i\frac{\varepsilon'}{2b}} \xrightarrow{\varepsilon'\to 0} -\frac{\pi i}{b}e^{-ib|a|} \tag{8}$$

Por lo que volviendo a llamar ε a ε' obtenemos la "prescripción $i\varepsilon$".